

**Суперпозиция конечного
числа гармонических
колебаний с
ЭКВИДИСТАНТНЫМИ частотами в
полосе $\Delta\nu$. (5.3)**

Михайлов Арсений (ВМК 303)

Нам дан сигнал $\xi(t)$, являющийся суперпозицией конечного числа (N) гармонических колебаний с эквидистантными частотами в полосе $\Delta\nu$. Будем считать, что все амплитуды гармонических колебаний одинаковы и равны a . Пусть начало полосы частот: ν_1 . Перейдём от обычных частот к угловым: $\omega_1 = 2\pi * \nu_1$, $\Delta\omega = 2\pi * \Delta\nu$. Тогда сигнал записывается в виде:

$$\xi(t) = a \sum_{n=0}^{N-1} \cos[(\omega_1 + n\Delta\omega)t]$$

где $\Delta\omega$ является шагом частот, т.е $\Delta\omega = \Delta\omega/(N-1)$. С таким представлением сигнала неудобно работать, поэтому преобразуем его:

$$\begin{aligned}\xi(t) &= \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N-1} a e^{i[w_1 + n d\omega] t} = a \operatorname{Re} e^{i w_1 t} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i n d\omega t} = a \operatorname{Re} e^{i w_1 t} \frac{1 - e^{i N d\omega t}}{1 - e^{i d\omega t}} = \\ &= a \operatorname{Re} \frac{\sin(N d\omega t / 2)}{\sin(d\omega t / 2)} e^{i[w_1 + (N-1)d\omega t / 2]} = a \frac{\sin(N d\omega t / 2)}{\sin(d\omega t / 2)} \cos(\omega_0 t)\end{aligned}$$

где ω_0 — центральная частота полосы ($\omega_0 = \omega_1 + \Delta\omega / 2$).
Также $N d\omega = N/(N-1) \Delta\omega$. Таким образом:

$$\xi(t) = a \frac{\sin \frac{N \Delta\omega t}{2(N-1)}}{\sin \frac{\Delta\omega t}{2(N-1)}} \cos(\omega_0 t)$$

На практике нас чаще всего интересует случай $N \gg 1$. То есть $N / (N - 1) \approx 1$ и $\sin(\Delta\omega t/2(N-1)) \approx \Delta\omega t/2(N-1) \approx \Delta\omega t/2T$.
Таким образом:

$$\xi(t) = aN \frac{\sin(\Delta\omega t/2)}{\Delta\omega t/2} \cos(\omega_0 t)$$

Нули амплитуды сигнала являются нулями огибающей волнового пакета с основной частотой ω_0 . Т.е:

$$aN \frac{\sin(\Delta\omega t/2)}{\Delta\omega t/2} = 0 \Leftrightarrow \sin(\Delta\omega t/2) = 0 \ (t \neq 0) \Leftrightarrow \Delta\omega t/2 = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Чтобы найти все нули сигнала нужно добавить к нулям амплитуды нули основной частоты ω_0 :

$$\cos(\omega_0 t) = 0 \Leftrightarrow \omega_0 t = \pi/2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

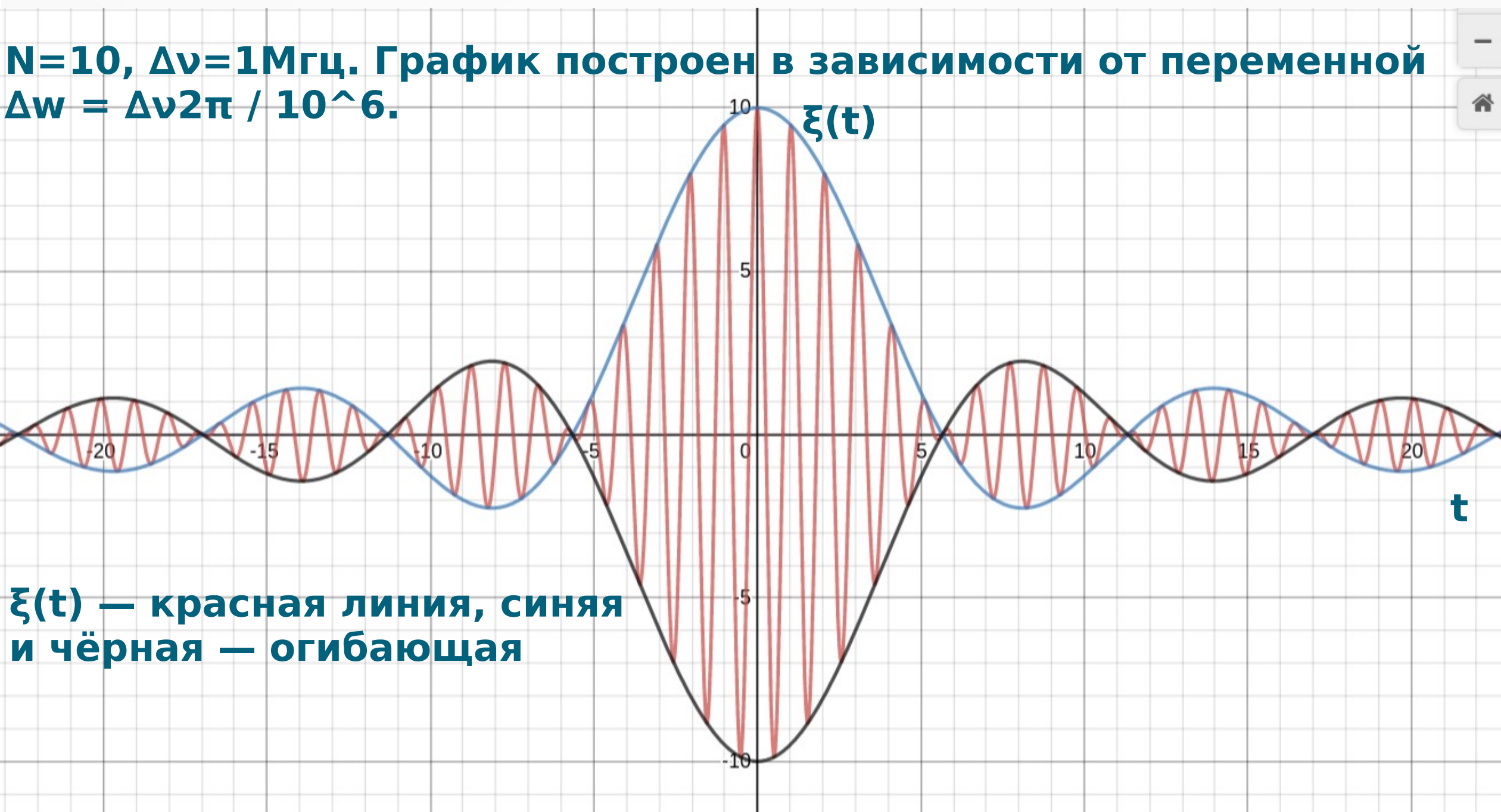
Максимум сигнала находится в точке $t = 0$, так как в этот момент все гармонические колебания достигают своей амплитуды. О периоде следования импульсов говорить некорректно, так как сигнал в целом не периодический (в приближенной форме). Но, как уже было показано ранее через промежуток времени $\Delta t = 2\pi/\Delta\omega$ амплитуда сигнала равна 0 (и это наименьший такой промежуток). Это время полагается за время длительности центрального импульса.

Так же это будет центральным лепестком сигнала. Найдём оценку на относительную энергию центрального лепестка:

$$\frac{W_0}{W} = \frac{\int_{-\Delta t}^{+\Delta t} |\xi(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi(t)|^2 dt}$$

Интеграл по конечному отрезку не вычисляется через первообразную, но его можно посчитать численно. По результатам расчётов относительная энергия центрального лепестка $\geq 80\%$. То есть энергия такого волнового пакета сосредоточена в сравнительно небольшом интервале частот (в центральном лепестке). Поэтому волновые пакеты называются также импульсами.

$N=10$, $\Delta\nu=1\text{МГц}$. График построен в зависимости от переменной $\Delta w = \Delta\nu 2\pi / 10^6$.



$\xi(t)$ — красная линия, синяя и чёрная — огибающая

$N=100$, $\Delta\nu=1\text{МГц}$. График построен в зависимости от переменной $\xi(t)$
 $\Delta w = \Delta\nu 2\pi / 10^6$.



$\xi(t)$ — красная линия, синяя и чёрная — огибающая

Видно, насколько главный лепесток преобладает (в энергетическом плане)